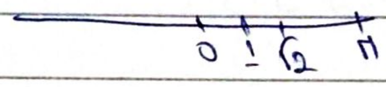
04-10-2018

Ώρες γραφείου: Πέμπτη 1:00-2:00

Μιγαδικοί Αριθμοί

$\mathbb{R}$: πραγματικοί αριθμοί ⟶



Παραδείγματα Μιγαδ. Αριθμ.

$3 + 4i$

$\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b$ πραγματικοί αριθμοί$\}$

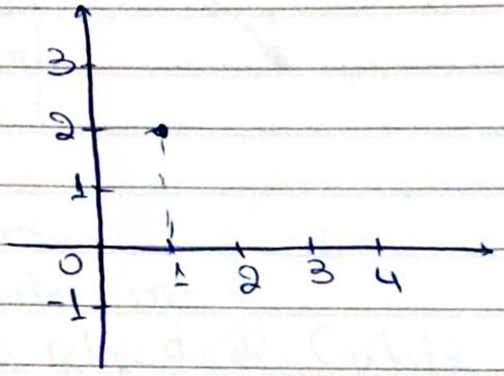
Για τον μιγαδικό $a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$ το a λέγεται πραγματικό μέρος ~~του~~ και το b φανταστικό μέρος.

→ Το i είναι σύμβολο.

Παρατήρηση: Για $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ οι μιγαδικοί $a+bi$ και $c+di$ είναι ίσοι αν και μόνο αν $a=c$ και $b=d$.

→ Ορισμός: Έστω $a+bi \in \mathbb{C}$, με $a,b \in \mathbb{R}$. Η γεωμετρική εικόνα του $a+bi$ είναι το σημείο $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

→ Παράδειγμα: Το $1+2i$ έχει γεωμ. εικόνα το σημείο $(1,2) \in \mathbb{R}^2$



→ Ορισμός. Διανυσματική εικόνα του μιγαδικού $a+bi$ με $a,b \in \mathbb{R}$ είναι το διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$ με αρχή το $(0,0)$ και τέλος (a,b)

(*) $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}\}$ = επίπεδο xy

Συμβολισμοί: Έστω $a,b \in \mathbb{R}$ (i) Αν $b=1$, γράφουμε $a+i$ αντί για $a+1 \cdot i$.

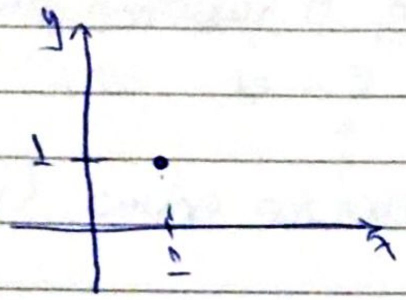
Πχ $3+i$ είναι ο μιγαδικός $3+1i$

(ii) Αν το $b=0$ γράφουμε a αντί για $a+0i$

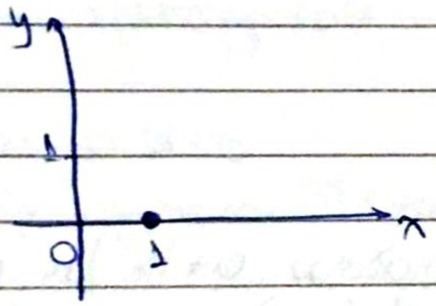
(iii) Αν το $a=0$ γράφουμε bi αντί για $0+bi$

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 1.

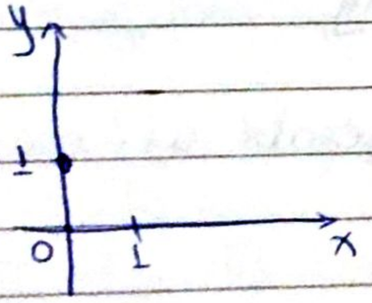
• $1+i = 1+1i$



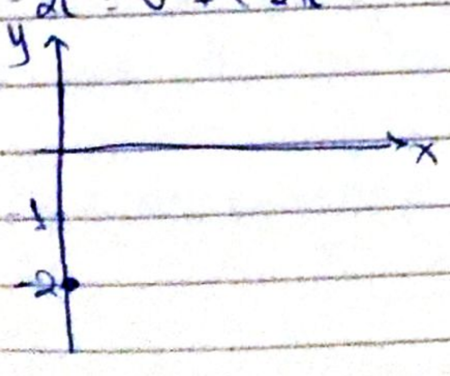
• $1 = 1+0i$



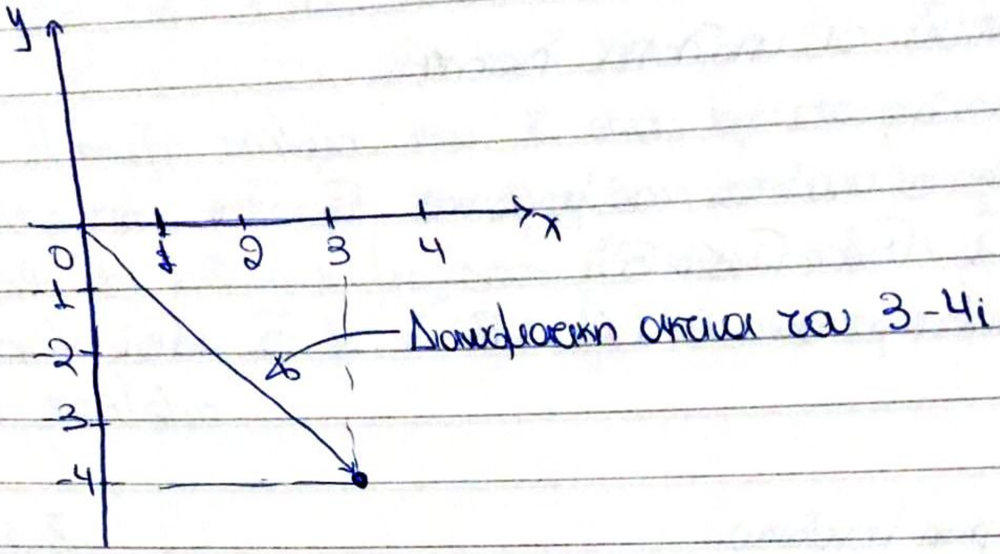
• $i = 0+1i$



• $-2i = 0+(-2)i$



• $3-4i = 3+(-4)i$



Ορισμός:

→ Πρόσθεση στο $\mathbb{C}$

Έστω $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

Δηλαδή το πραγματικό μέρος του αθροίσματος είναι το άθροισμα των πραγματικών μερών των προσθετέων. Το αντίστοιχο ισχύει για το φανταστικό μέρος.

π.χ. $(-4+6i)+(7-2i) = ((-4)+6i)+(7+(-2)i) = ((-4)+7)+(6+(-2))i = 3+4i$

• Η πράξη + στο $\mathbb{C}$ είναι προσεταιριστική (δηλαδή αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$), και μεταθετική (δηλ. $z_2+z_1 = z_1+z_2$), έχει ουδέτερο το $0 = 0+0i$ και αν $a,b \in \mathbb{R}$ ο μιγαδικός $a+bi$ έχει αντίθετο τον μιγαδικό $(-a)+(-b)i$.

Απόδειξη

Έστω $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Τότε: $((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)) + (a_3+b_3i) = ((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) + (a_3+b_3i) =$

$= ((a_1+a_2)+a_3) + ((b_1+b_2)i + b_3i) \overset{\text{προσθ. στο } \mathbb{R}}{\underset{\text{προσεταιρ.}}{=}} (a_1+(a_2+a_3)) + (b_1+(b_2+b_3))i =$

$= (a_1+b_1i) + ((a_2+a_3)+(b_2+b_3)i) =$

$= (a_1 + b_1 i) + ((a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i))$

Ομοίως αποδ. οι υπόλοιπες ιδιότητες.

Να βρεθεί ο αντίθετος του μιγαδικού $\sqrt{2} - \sqrt{5}i$

Απαντ: $\sqrt{2} - \sqrt{5}i = \sqrt{2} + (-\sqrt{5})i$

Άρα ο αντίθετος είναι $-\sqrt{2} + (-(-\sqrt{5}))i = -\sqrt{2} + \sqrt{5}i$

Ορισμός

→ Αφαίρεση μιγαδικών

Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 4

- $(3 - 2i) - (6 + 4i) = (-3) + (-6)i = -3 - 6i$

Ορισμός

→ Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών

Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $(a + bi)(c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) +$
$+ (ad + bc)i$

Ορισμός Έστω $z \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z \cdot z^2 \ldots$

Παράδειγμα: $i^2 = (0 + 1i)^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)i =$
$= -1$

Μιγαδικός Κανόνας: $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$
$= (ac-bd) + (ad+bc)i$

- Η πράξη πολλ/σμος στο $\mathbb{C}$ είναι προσεταιριστική, μεταθετική, επιμεριστική ως προς την πρόσθεση, έχει ουδέτερο το $1 = 1+0$. Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός (δηλαδή κάθε μιγαδικός $a+bi$ με $a,b \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ ή $b \neq 0$) έχει αντίστροφο το $\mathbb{C}$ ως προς τον πολλ/σμο.

Απόδειξη
Προσεταιριστική, μεταθετική, ουδέτερο το 1, από τον ορισμό. Επίσης και επιμεριστική ως προς την πρόσθεση.

Ορισμός: Έστω $a,b \in \mathbb{R}$

(i) Το μέτρο $|a+bi|$ του μιγαδικού αριθμού $a+bi$ είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\sqrt{a^2+b^2}$

(ii) Ο συζυγής $\overline{(a+bi)}$ του $a+bi$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $a-bi = a+(-b)i$

Φυλ 1 - Άσκηση 2.

Αν $z = -5+7i$ τότε $\bar{z} = -5+(-7) = -5-7i$

Αν $z = 4i$, τότε $\bar{z} = -4i$

Αν $z = -i$, τότε $\bar{z} = -(-1)i = 1i = i$

Φυλ 1 - Άσκηση 3

$z = 1+i$ τότε $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$z = -5i$ τότε $|z| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

$z = 0 = 0+0i$ τότε $|z| = 0$

$z = -4$ τότε $|z| = \sqrt{4^2+0^2} = \sqrt{4^2} = 4.$

Λήμμα: Έστω $z \in \mathbb{C}$. Τότε $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Απόδειξη: Έστω $z = a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε $\bar{z} = a - bi$ και

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2 i^2 =$$
$$= a^2 + b^2 = \sqrt{a^2+b^2}^{\,2} = |z|^2.$$

Πόρισμα: Έστω $z \in \mathbb{C}$ μη μηδενικός. Τότε ο μιγαδικός $w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ είναι αντίστροφος του z ως προς τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Από την πρόταση $z \cdot w = z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$.

Συμπέρασμα: Αν $a, b \in \mathbb{R}$, όχι και τα δύο μηδέν ο αντίστροφος του μιγαδικού $a + bi$ ως προς τον πολλαπλασιασμό είναι ο μιγαδικός

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Π.χ. Ο αντίστροφος του μιγαδικού $z = 1 + i$ είναι ο

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i$$

Πράγματι $(1+i)\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}i\right) + i\frac{1}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)i =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

(A) → Αν αντί για "−" είχαμε "+" δεν θα ίσχυαν τα προηγούμενα